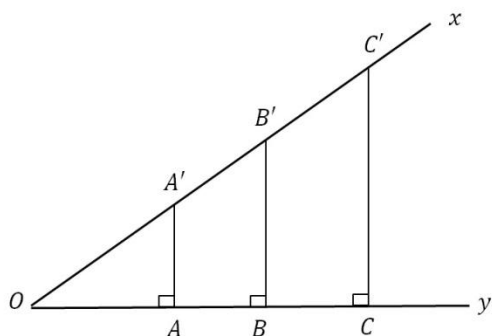




مثلثات

زاویه ی $\widehat{xOy}$ را در شکل مقابل در نظر بگیرید. نقاط A و B و C را روی Oy اختیار کرده و عمودهایی بر همان ضلع رسم می کنیم تا ضلع Ox را در A' و B' و C' قطع کنند.



$$\Delta OAA' \sim \Delta OBB' \Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} \quad (1)$$

$$\Delta OAA' \sim \Delta OCC' \Rightarrow \frac{AA'}{CC'} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{AA'}{OA} = \frac{CC'}{OC} \quad (2)$$

با توجه به رابطه های (۱) و (۲) مشاهده می کنیم که نسبت های $\frac{BB'}{OB}$ و $\frac{AA'}{OA}$ و $\frac{CC'}{OC}$ با هم برابرند و مقدار ثابتی می باشند که این مقدار ثابت را تانژانت زاویه ی $\widehat{O}$ می نامیم و آن را به صورت $\tan \widehat{O}$ نشان می دهیم.

به همین ترتیب می توان گفت $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} = \frac{OC}{CC'}$ که این مقدار ثابت را کتانژانت زاویه ی $\widehat{O}$ نامیده و آن را به صورت $\cot \widehat{O}$ نشان می دهیم.

برای تعریف سینوس یک زاویه و کسینوس همان زاویه شکل فوق را در نظر بگیرید:

$$\Delta OAA' \sim \Delta OBB' \Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} \quad (1)$$

$$\Delta OAA' \sim \Delta OCC' \Rightarrow \frac{AA'}{CC'} = \frac{OA'}{OC'} \Rightarrow \frac{AA'}{OA'} = \frac{CC'}{OC'} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'}$$

سه نسبت فوق با هم برابر و مقداری ثابت می باشند و سینوس زاویه ی $\widehat{O}$ نامیده می شوند و آن را به صورت $\sin \widehat{O}$ نشان می دهیم.

به همین ترتیب می توان گفت نسبت های $\frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OA}{OA'}$ با هم برابرند که این نسبت را کسینوس زاویه $\widehat{O}$ نامیده و آن را به صورت $\cos \widehat{O}$ نشان می دهیم.

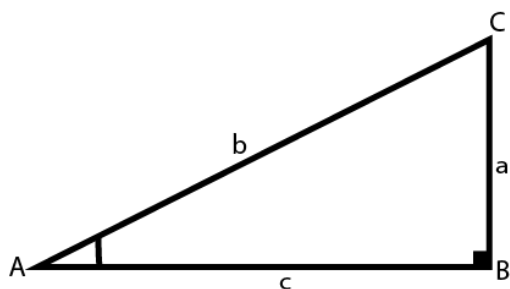


نکته: با توجه به این که وتر مثلث از اضلاع دیگر بزرگتر است $\sin$ و $\cos$ زاویه $\hat{O}$ کوچکتر از واحدند.

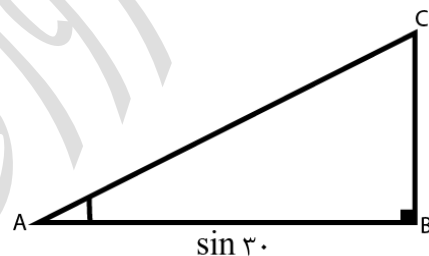
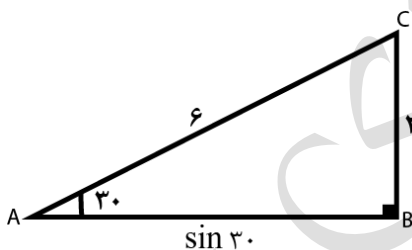
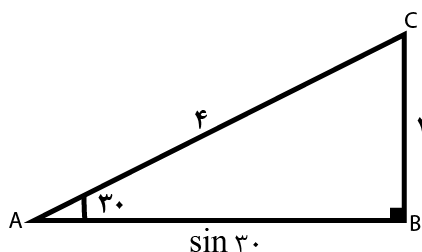
نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده در مثلث الزاویه:

تعریف $\sin$: در هر مثلث قائم الزاویه از تقسیم ضلع مقابل به زاویه ی حاده بر وتر سینوس آن زاویه به

دست می آید.

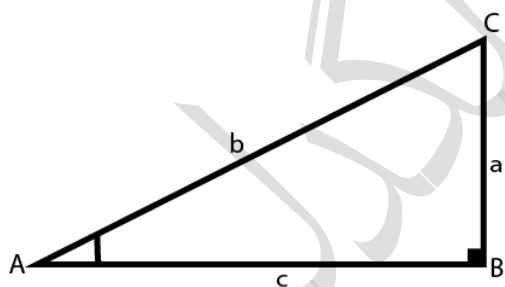


$$\sin A = \frac{a}{b} = \frac{BC}{AC}$$



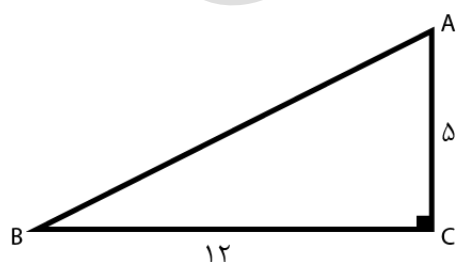
تعریف $\cos$: در هر مثلث قائم الزاویه از تقسیم ضلع مجاور به زاویه ی حاده بر وتر کسینوس آن زاویه

مشخص می شود.



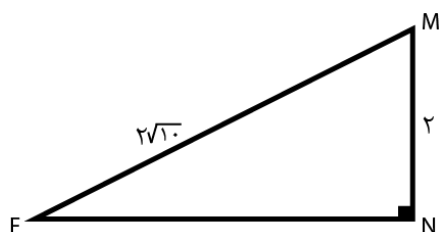
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

مثال (۱) در هر یک از شکل های زیر نسبت مثلثاتی زاویه ی خواسته شده را مشخص کنید.



$$\sin B =$$

$$\cos A =$$

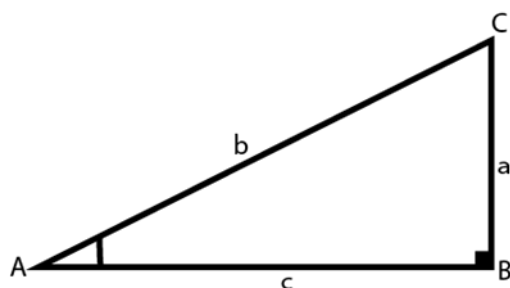


$$\cos F =$$

$$\sin M =$$

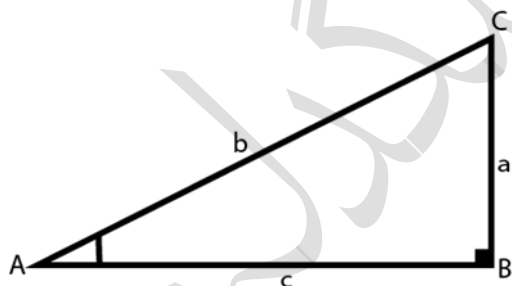
ب- در مثلث قائم الزاویه $\widehat{ABC}$ ($\hat{A} = 90^\circ$) و $AC = 3AB$ مقدار $\sin B$ را بیابید .

تعریف $\tan$: در هر مثلث قائم الزاویه از تقسیم طول ضلع مقابل به زاویه ی حاده بر طول ضلع مجاور زاویه، تانژانت آن زاویه مشخص می شود.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

تعریف $\cot$: در هر مثلث قائم الزاویه از تقسیم طول ضلع مجاور به زاویه حاده بر طول ضلع مقابل کتانژانت آن زاویه مشخص می شود .



$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

با توجه به تعریف $\tan$ و $\cot$ برای هر زاویه دلخواه همواره :

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} \quad / \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} \quad / \quad \tan A \cdot \cot A = 1$$



نتیجه :

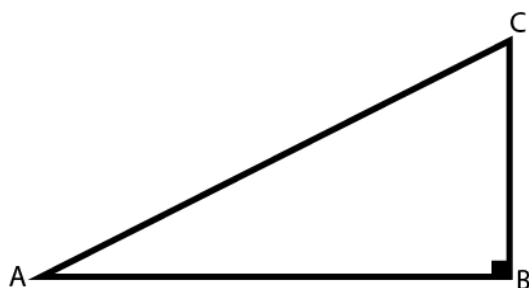
مثال (۲) جاهای خالی زیر را پر کنید .

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 60^\circ = \dots$$

$$\cot B = -1 \Rightarrow \tan B = \dots$$

$$\tan x = \frac{2}{3} \Rightarrow \cot x = \dots$$

به سادگی می توان دید در مثلث قائم الزویه ABC ،

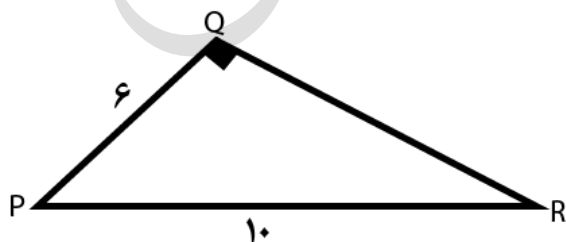


$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AB} = \dots A$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} = \dots A$$

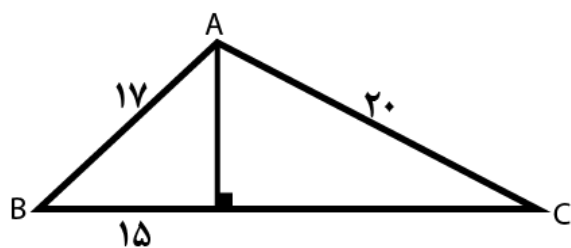
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad / \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} : A \text{ بنابرین برای هر زاویه دلخواه}$$

۳- در هر یک از شکل های زیر نسبت های مثلثاتی زوایای خواسته شده را مشخص کنید .



$$\tan R =$$

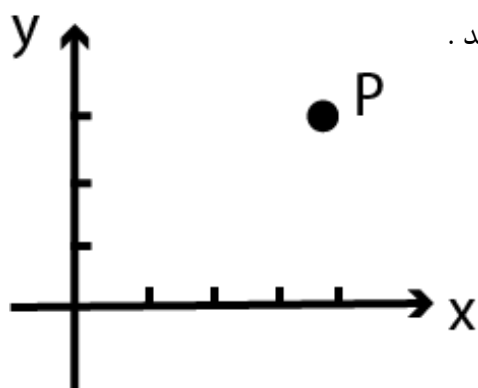
$$\cot R =$$



$$\sin B =$$

$$\tan C =$$

۴- نقطه ی $P(4,3)$ را به نقطه ی O مبدا مختصات وصل کنید . زاویه ی بین پاره خط OP و جهت مثبت محور طول ها را α نامیده و نسبت های مثلثاتی زاویه ی α را بیابید .



۵- در مثلث قائم الزاویه ABC ($A = 90^\circ$) رابطه ی $\tan^2 \beta = (2 - \tan \beta)^2$ برقرار است و $AB = 2$ است . مساحت مثلث را بیابید .

۴ (۴)

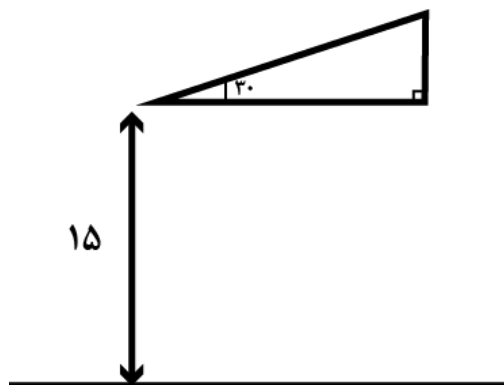
۳ (۳)

۲ (۲)

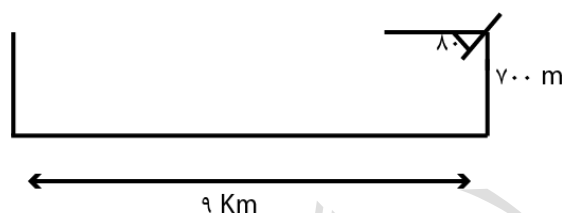
۱ (۱)



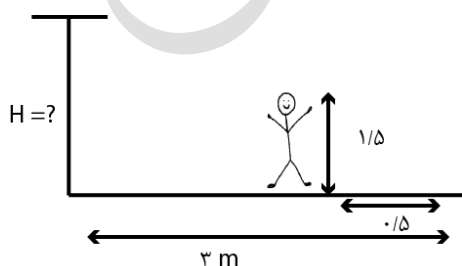
۶- مثال کتاب - یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین با زاویه 30° پرتاب می شود . می خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه ، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد .



۷- یک هواپیما در ارتفاع ۷۰۰ متری از سطح زمین در حال فرود آمدن است . در لحظه ی شروع کم شدن ارتفاع ، زاویه ای که هواپیما با سطح افق می سازد 8° است . اگر طول باند فرودگاه ۹ کیلومتر باشد فاصله ی نقطه ی فرود از دیوار انتهای باند چقدر است ؟ ($\tan 8^\circ = 0.14$)

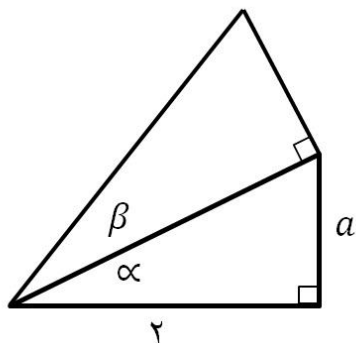


۸- نسرین می خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه ی آن ۳ متر است حساب کند . نسرین $1/5$ متر و طول سایه ی او در همان لحظه $0/5$ متر است . ارتفاع تیر برق چقدر است ؟

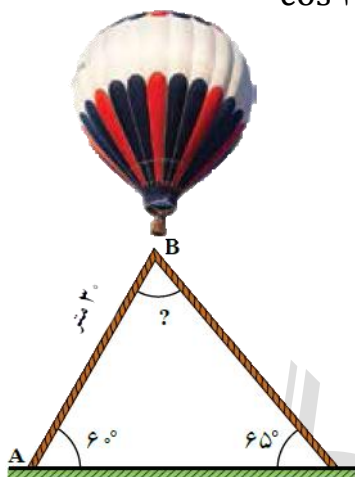




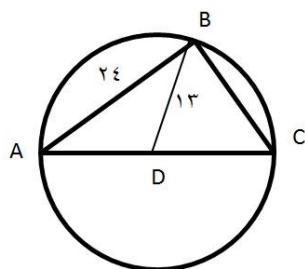
۹- در شکل زیر $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ را بیابید. بر حسب a



۱۰- در راهپیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است. می خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم. $\cos 25^\circ = 0.8$

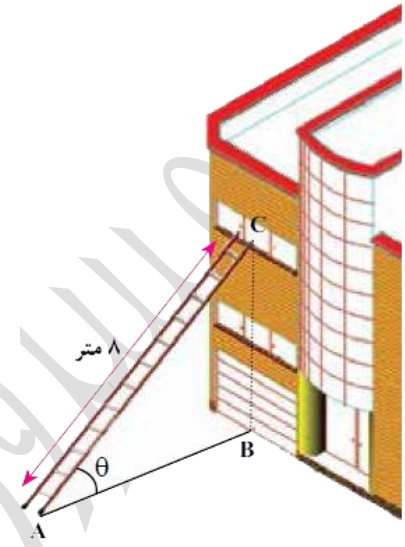


ب- در دایره ی زیر D مرکز دایره است. $\tan A$ را بیابید.





۱۱- مطابق شکل مقابل ، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است . زاویه ی نردبان با سطح زمین $\theta = 30^\circ$ باشد ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید و سپس فاصله ی پای نردبان تا ساختمان چقدر است ؟



۱۲- یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید و زاویه های حاده اش را α و B بنامید و سپس نشان دهید که:

نکته مهم :

$$\sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\tan(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cot(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin \alpha = \cos B \quad \text{الف)}$$

$$\cos \alpha = \sin B \quad \text{ب)}$$

$$\tan \alpha = \cot B \quad \text{پ)}$$

$$\cot \alpha = \tan B \quad \text{ت)}$$

$$\frac{\sin 79^\circ}{\cos 11^\circ} = ?$$

$$\frac{2 \tan 20^\circ}{\cot 70^\circ} = ?$$

$$\frac{\sin 22^\circ}{\sin 68^\circ} = ?$$

$$\sin 15^\circ + \sin 25^\circ + \sin 35^\circ + \sin 45^\circ - \cos 55^\circ - \cos 65^\circ - \cos 75^\circ = ?$$

$$\tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ = ?$$



۱۳- با رسم یک مثلث متساوی الاضلاع نسبت های مثلثاتی زوایای 30° و 60° را بیابید.

ب- مثلث $\triangle ABC$ با مفروضات $\hat{A} = 60^\circ$ و $AB = 7$ و $AC = 12$ مطلوب است طول BC.

۱۴- با استفاده از یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را رسم کنید.

ب- مقدار $(\sin 1 - \cos 1)(\sin 2 - \cos 2) \dots (\sin 89 - \cos 89)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $(-\frac{1}{2})^{45}$

(۲) -۱

(۱) ۱



۱۵- با رسم یک مربع نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را بیابید .

با توجه به مطالب عنوان شده می توان نوشت :

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۶- شخصی با قد تقریباً $\sqrt{3}$ متر در نقطه B ساختمانی را با زاویه ی 30° رویت می کند . اگر این شخص ۱۱۰ متر به ساختمان نزدیک شود ، ساختمان با زاویه ی 60° رویت می شود . ارتفاع این ساختمان را محاسبه کنید .

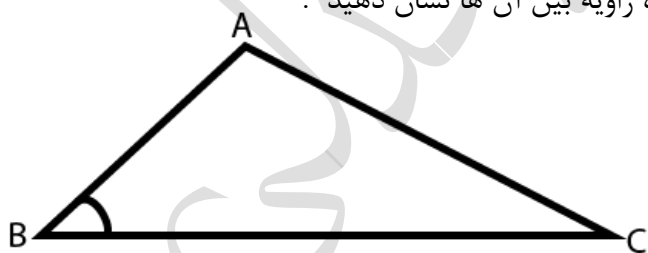


ب- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt{\frac{-1 + 2 \cos 30^\circ}{1 + 2 \sin 60^\circ}} + \frac{-2 \cos 60^\circ + 1}{2 \sin 30^\circ + 1}$$

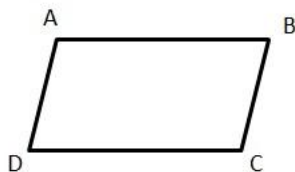
۱۷- رضا با قد ۱/۵ متر و حامد با قد ۲ متر در فاصله ی ۱۱۲ متری یکدیگر قرار دارند و بین آنها یک ساختمان مرتفع وجود دارد . در مکانی که رضا قرار گرفته است نوک ساختمان با زاویه ی 30° رویت می شود . حامد نیز با زاویه ی 45° نوک ساختمان را می بیند . ارتفاع ساختمان را بیابید .

۱۸- در هر مثلث با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع و اندازه زاویه بین آن ها نشان دهید :



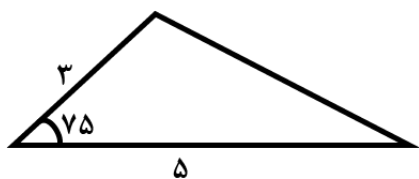
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$$

نتیجه : مساحت هر متوازی الاضلاع برابر با است .

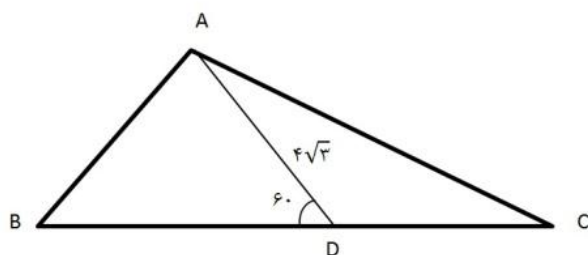
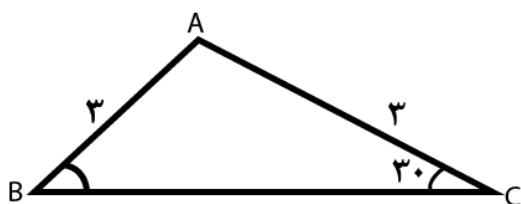




۱۹- مساحت های مثلث های زیر را بیابید .



$$(\sin 75 = 0.96)$$



$$BC=4$$

$$S=?$$

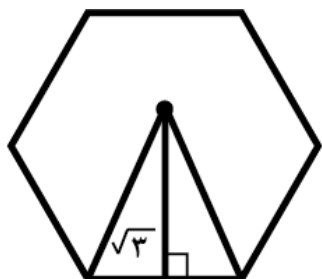
۲۰- برای مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a دستوری مشخص کنید که مساحت آن را بر حسب a نشان

دهد .

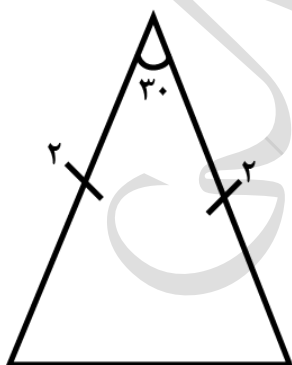


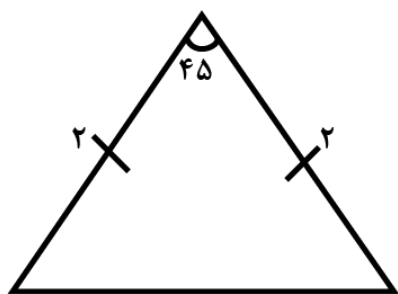
۲۱- مساحت شش ضلعی منتظمی را مشخص کنید که اندازه ی هر ضلع آن ۳cm است .

۲۲- مساحت شش ضلعی منتظم روبرو را بیابید .



*** نسبت های مثلثاتی زاویه 15° و $22/5^\circ$ را در شکل روبرو بیابید .





نکته مهم :

$$\sin 2\alpha \neq 2 \sin \alpha$$

$$\sin 60^\circ \neq 2 \sin 30^\circ$$

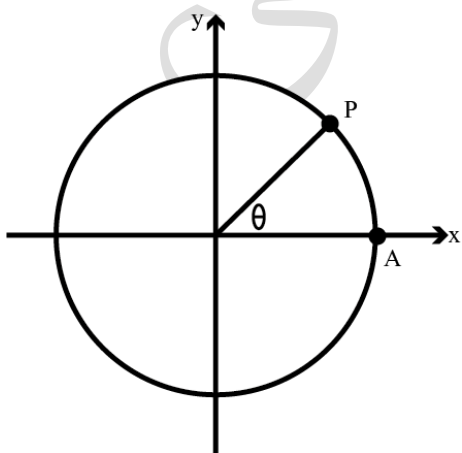
$$\cos 2\alpha \neq 2 \cos \alpha$$

$$\tan 2\alpha \neq 2 \tan \alpha$$

$$\cot 2\alpha \neq 2 \cot \alpha$$

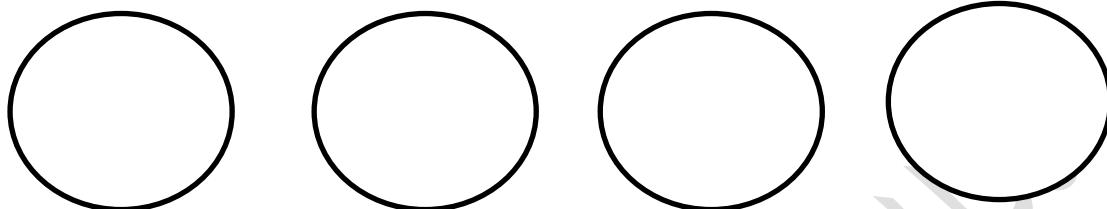
دایره مثلثاتی

تعریف : دایره مثلثاتی ، دایره ای است جهت دار با شعاع واحد که جهت مثبت آن در خلاف جهت عقربه های ساعت است و نقطه ی A روی آن مبدا حرکت در نظر گرفته می شود . هر نقطه روی این دایره با یک زاویه و هر زاویه با نقطه ای از این دایره مشخص می شود . (مرکز این دایره مبدا مختصات است)





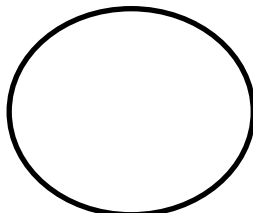
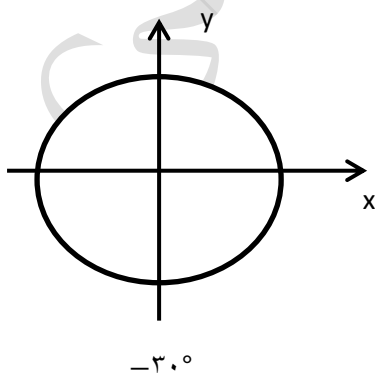
۲۳- زاویه های -90° و 90° و -210° و 225° و 540° و -3735° درجه را روی دایره مثلثاتی در موقعیت استاندارد مشخص کنید .



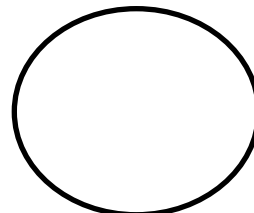
ب- زوایای $\pm 180^\circ$, $\pm 540^\circ$, $\pm 900^\circ$, $\pm 1260^\circ$ را روی دایره مشخص کنید .

پ- زوایای $\pm 0^\circ$, $\pm 360^\circ$, $\pm 720^\circ$, $\pm 2160^\circ$ را روی دایره مشخص کنید .

۲۴- هر یک از زاویه های زیر را روی دایره مثلثاتی داده شده نشان دهید .



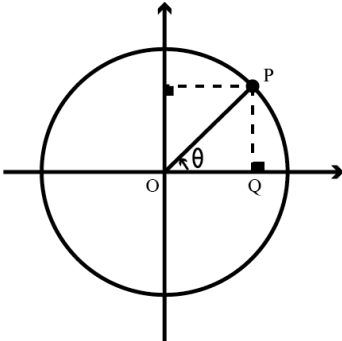
135°



-270°



فرض کنید $P(x, y)$ نقطه دلخواهی روی دایره ی مثلثاتی باشد و θ زاویه ای است که نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{OX}$ می سازد. از نقطه ی P خطی بر محور OX عمود می کنیم و محل برخورد را Q می نامیم. حالا نسبت های مثلثاتی زاویه θ در مثلث OPQ عبارتند از:

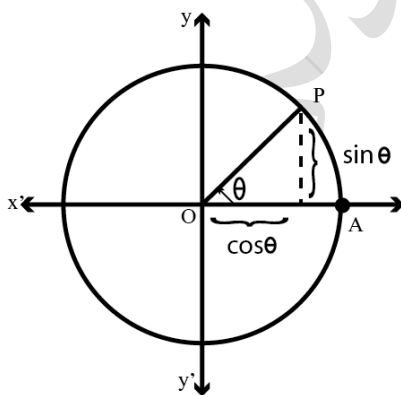


$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{PQ}{OP} = PQ = y \Rightarrow \sin \theta = PQ = y \quad \text{۱ = شعاع دایره}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ \Rightarrow \cos \theta = OQ = x$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{x}{y} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

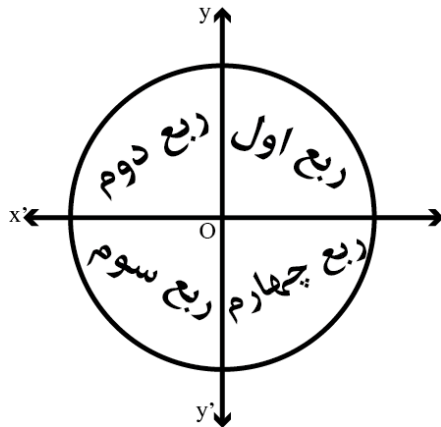




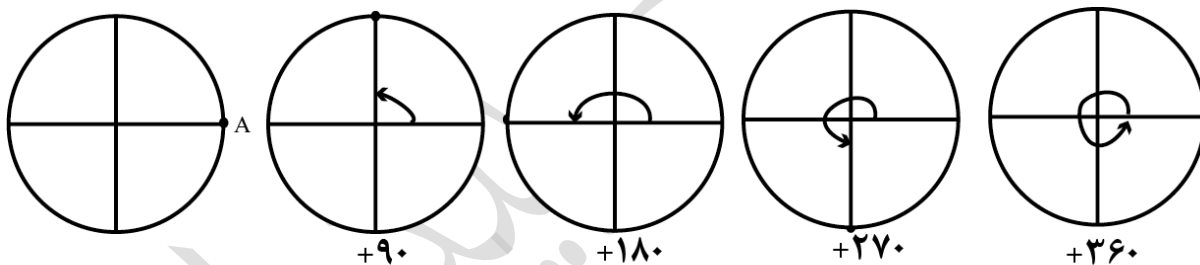
نتیجه :

۱- با توجه به روابط بالا محور xOx' یا محور x ها (طولها) را محور کسینوس ها و محور yOy' یا محور y ها (عرض ها) را محور سینوس ها می نامند .

۲- دو محور عمود بر هم xOx' و yOy' صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کند . هر یک از این قسمت ها را یک ناحیه یا ربع مثلثاتی می نامیم .

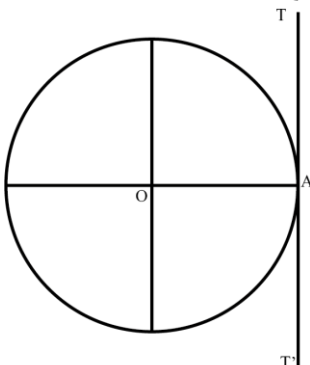


۳- زوایای 0° و 90° و 180° و 270° و 360° زوایای مرزی هستند .



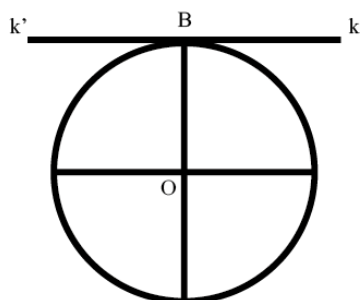
۴ - نقطه $A(0/1)$ روی دایره مثلثاتی به اندازه 390° در خلاف جهت عقربه های ساعت جا به جا می شود تا به موقعیت نقطه B برسد . مختصات نقطه B را بیابید .

۵- اگر از نقطه A خطی موازی محور y ها رسم کنیم خط TAT' را محور $\tan$ ها می گویند:

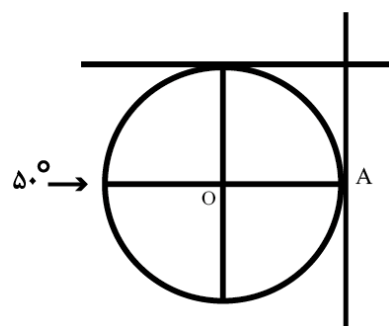




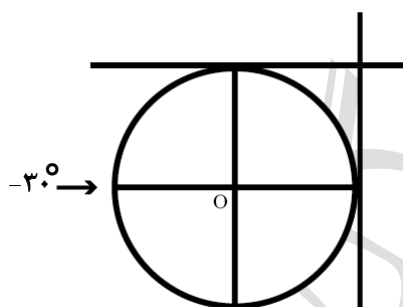
۶- اگر از نقطه B خطی موازی محور Xها رسم کنیم خط BKB' را محور cot ها می گویند :



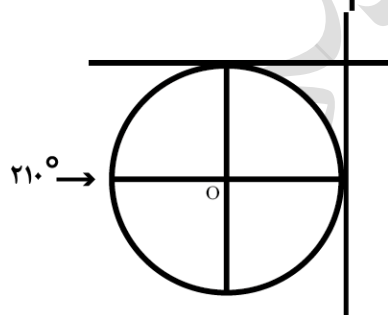
۲۵- زوایای ۵۰ و ۳۰ و ۱۸۲ و ۹۵- درجه را روی دایره ی مثلثاتی مشخص کنید و مقادیر $\sin$ و $\cos$ و $\tan$ و $\cot$ هر زاویه را روی دایره ی مثلثاتی مشخص کرده و علامت $\sin$ و $\cos$ و $\tan$ و $\cot$ را تعیین کنید .



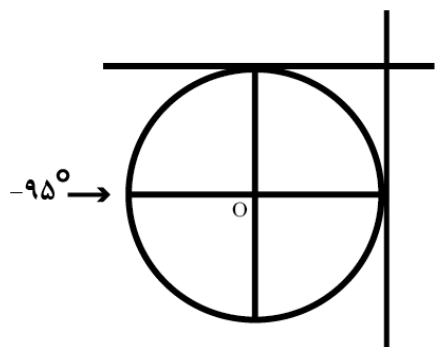
$\sin$	$\tan$
$\cos$	$\cot$



$\sin$	$\tan$
$\cos$	$\cot$



$\sin$	$\tan$
$\cos$	$\cot$



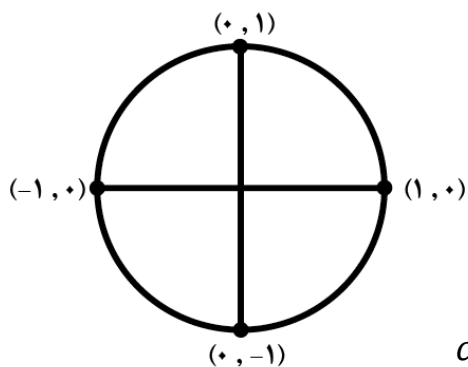
$\sin$

$\tan$

$\cos$

$\cot$

	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$	ربع
$0 < \theta < 90$					ربع اول
$90 < \theta < 180$					ربع دوم
$180 < \theta < 270$					ربع سوم
$270 < \theta < 360$					ربع چهارم

نسبت های مثلثاتی زاویه 0° 

$$\sin \theta = y = 0$$

$$\cos \theta = x = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{0} = \text{تعریف نشده}$$

۲۶- نسبت های مثلثاتی زاویه $\theta = 90^\circ$ را بیابید.۲۷- نسبت های مثلثاتی زاویه $\theta = 180^\circ$ را بیابید.۲۸- نسبت های مثلثاتی زاویه $\theta = 270^\circ$ را بیابید.



۲۹- نسبت های مثلثاتی زاویه $\theta = 360^\circ$ را بیابید.

با توجه به نتایج بالا داریم:

θ	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
Sin					
Cos					
Tan					
cot					

نکته بسیار مهم: از آنجائی که شعاع دایره مثلثاتی، واحد است پس:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad / \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$-\infty < \tan \theta < +\infty \quad -\infty < \cot \theta < +\infty$$

۳۰- اگر $1 - \cos \theta = \frac{5}{3}$ و $\tan \theta \cdot \cos \theta > 0$ انتهای کمان θ در کدام ناحیه است ؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول



۳۱- عبارت $A = 3 \cos \theta - 5$ به کدام بازه تعلق دارد؟

- (۱) $[-5 \text{ و } -10]$ (۲) $[-2 \text{ و } -8]$
 (۳) $[-5 \text{ و } 5]$ (۴) $[-5 \text{ و } 10]$

۳۲- اگر بیشترین و کمترین مقدار عبارت $3 \sin x - 4$ به ترتیب A و B باشد $A + B^2$ کدام است.

- (۱) -8 (۲) -6 (۳) 48 (۴) 49

ب- مجموع حداکثر و حداقل مقدار عبارت $\frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha}$ را بیابید.

۳۳- حاصل $|1 - \cos x| + |2 \cos x - 3|$ برابر کدام است.

- (۱) $\cos x - 2$ (۲) $2 - \cos x$
 (۳) $4 - 3 \cos x$ (۴) $3 \cos x - 4$

ب- حداقل و حداکثر عبارت $K = \sin^2 x - \sin x + \frac{5}{4}$ را بیابید.



۳۵- اگر $45 < \alpha < 60$ - باشد حدود نسبت های مثلثاتی را بیابید .

۳۶- اگر $270 < \theta < 60$ باشد و $\cos \theta = \frac{2-3m}{5}$ حدود m را بیابید .

۳۷- اگر $-20 < x < 20$ و $m = 2 \cos(3x) + 1$ باشد حدود m را بیابید.

(۴) $(2,3]$

(۳) $[2,3)$

(۲) $(1,2]$

(۱) $[1,2)$



۳۸- کمانی از دایره ی مثلثاتی را مشخص کنید که اگر انتهای کمان مقابل به زاویه ی α در این محدوده قرار گیرد داشته باشیم :

$$\sin \alpha \geq \frac{1}{3} \quad \text{الف-}$$

$$\cos \alpha \geq -\frac{2}{3} \quad \text{ب-}$$

$$\tan \alpha \geq \sqrt{2} \quad \text{پ-}$$

$$\cot \alpha \geq \frac{-1}{2} \quad \text{ت-}$$

۳۹- اگر $0 < \alpha < 360^\circ$ باشد حدود مقادیری از α را مشخص کنید که برای آن ها $\cos \alpha < \sin \alpha$

$$\tan \alpha > \cot \alpha \quad \text{ب-}$$

$$۴۰- \text{اگر } 180^\circ < \alpha < 225^\circ \text{ حاصل } \frac{-|\sin \alpha - \cos \alpha| - |\sin \alpha + \cos \alpha|}{|\tan \alpha - \cot \alpha| + |\tan \alpha + \cot \alpha|} \text{ کدام است ؟}$$

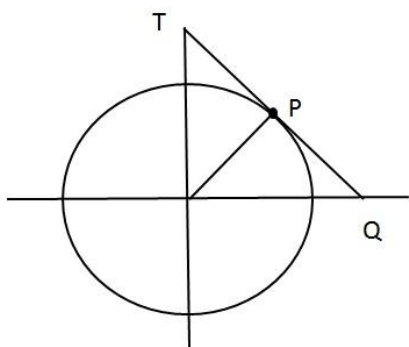
۴۱- کلیه مقادیر θ در بازه ی $(0, 360^\circ]$ را بیابید که :

$$\text{الف) } \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} > 0$$



ب) $\frac{1-2\cos\theta}{(1-\cos\theta)(1+\sin\theta)} > 0$

۴۲- در دایره ی مثلثاتی زیر اگر P بر نقطه $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$ منطبق شود طول پاره خط TQ را بیابید .





۴۳- نسبت های مثلثاتی زوایای ۱۲۰° و ۱۵۰° و ۴۰۵° و ۲۴۰° را بیابید .

۴۴- حدود زاویه ی θ را در حالت های زیر مشخص کنید.

الف) $\sin \theta < ۰$ و $\cos \theta > ۰$

ب) $\sin \theta > ۰$ و $\tan \theta < ۰$

پ) $\sin \theta \cdot \cos \theta < ۰$

ث) $\cos \theta < ۰$



$$\sin \alpha \cot \alpha < 0 \quad \text{و} \quad \sin \alpha \cos \alpha < 0 \quad \text{ج}$$

$$\sin \alpha + \cot \alpha < 0 \quad \text{و} \quad \tan \alpha + \cot \alpha > 0 \quad \text{چ}$$

۴۵- علامت $<=>$ بگذارید.

$$۱) \sin 20^\circ \quad \square \quad \sin 40^\circ$$

$$۲) \sin 120^\circ \quad \square \quad \sin 150^\circ$$

$$۳) \cos 20^\circ \quad \square \quad \cos 40^\circ$$

$$۴) \cos 120^\circ \quad \square \quad \cos 180^\circ$$

$$۵) \sin 22^\circ \quad \square \quad \sin 27^\circ$$

$$۶) \sin 24^\circ \quad \square \quad \cos(-20^\circ)$$

$$۷) \sin 12^\circ \quad \square \quad \cos 24^\circ$$

ب- حاصل هر عبارت را مشخص کنید.

$$|\sin 10^\circ - \sin 90^\circ| + |\sin 10^\circ - \sin 7^\circ| + |\sin 7^\circ - \sin 0^\circ|$$



$$\cos 71^\circ - \cos 19^\circ + |\cos x - \cos 19^\circ| + |\cos 71^\circ - \cos x| \quad 20^\circ < x < 70^\circ$$

$$\sqrt{(\tan \alpha - \tan \beta)^2} + \tan \alpha \quad 0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$$

نتیجه گیری:

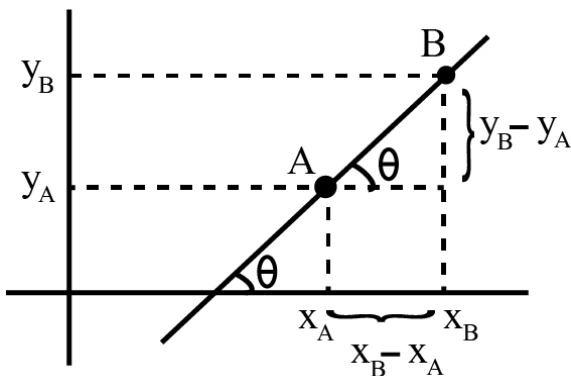


رابطه ی شیب خط با تانژانت زاویه:

خط L را در نظر گرفته و دو نقطه ی A, B را به دلخواه روی آن انتخاب می کنیم طبق تعریف سال

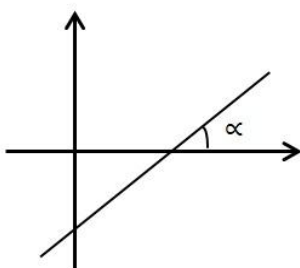
گذشته شیب خط AB برابر: $A \left| \begin{matrix} x_A \\ y_A \end{matrix} \right. B \left| \begin{matrix} x_B \\ y_B \end{matrix} \right.$

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرضها}}{\text{تفاضل طولها}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta$$

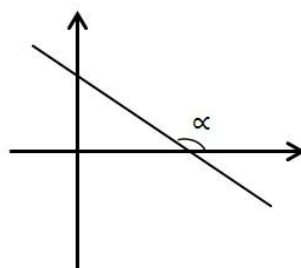


بنابر این:

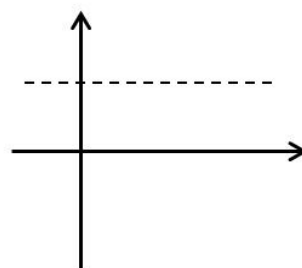
شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد.



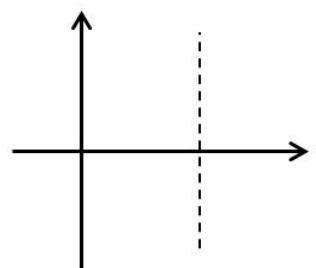
$$m = \tan \alpha > 0$$



$$m = \tan \alpha < 0$$



$$m = \tan \alpha = 0$$



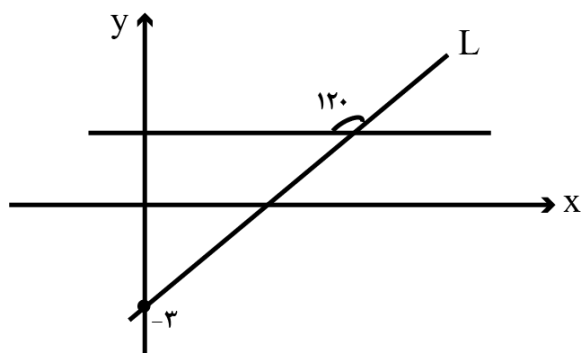
$$m = \tan \alpha$$

$$\tan 90^\circ = \text{ت.ن}$$



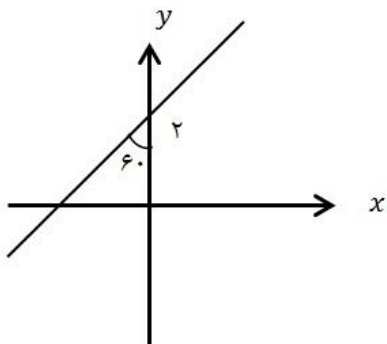
۴۶- معادله ی خطی را بنویسید که زاویه ی آن با محور x ها 30° است و از نقطه ی $(0, 1)$ می گذرد.

۴۷- با توجه به شکل زیر معادله ی خط L را به دست آورید.



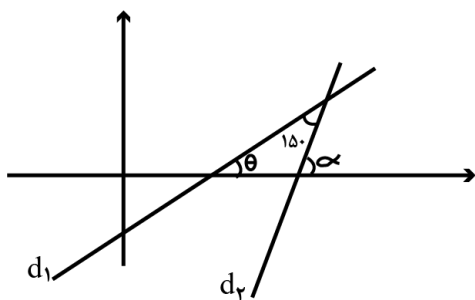
۴۸- زاویه ای که خط d با معادله ی $2x - 2y = 1$ با جعت مثبت محوز طول ها می سازد را مشخص کنید.

۴۹- با توجه به شکل زیر معادله ی خط L را بتویسید.





۵۰- در شکل زیر d_1 به معادله $\sqrt{3}x - 3y = 5$ با خط d_2 زاویه 15° می سازد معادله ی خط d_2 را به دست آورید.



۵۱- بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای عبارت های زیر را تعیین کنید.

۱) $\frac{3}{3+4 \cos x} - 1$

۲) $1 + 2 \sin^2 x$

۳) $4\sqrt{\cos x} + \cos x$



$$۴) \sin^2 x - \cos x + 1$$

روابط بین نسبت های مثلثاتی:

با توجه به مطالبی که در صفحات قبل آموختیم:

$$\alpha = ۶۰^\circ$$

$$۱) \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{3}}{۲} \text{ و } \cos ۶۰ = \frac{1}{۲} \Rightarrow \sin^2 ۶۰ + \cos^2 ۶۰ = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\alpha = ۴۵^\circ$$

$$۲) \sin ۴۵ = \frac{\sqrt{2}}{۲} \text{ و } \cos ۴۵ = \frac{\sqrt{2}}{۲} \Rightarrow \sin^2 ۴۵ + \cos^2 ۴۵ = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

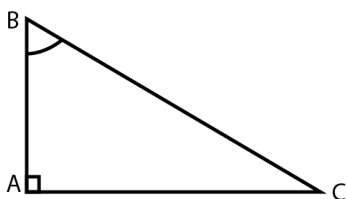
$$\alpha = ۱۸۰^\circ$$

$$\sin ۱۸۰ = ۰ \text{ و } \cos ۱۸۰ = -1 \Rightarrow \sin^2 ۱۸۰ + \cos^2 ۱۸۰ = ۰ + 1 = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{۳}{۵} \text{ (ربع دوم)} \text{ و } \cos \alpha = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

از تساوی های بالا نتیجه می شود ظاهراً تساوی $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ همواره برقرار است و به مقدار θ بستگی ندارد.

اثبات به روش اول:



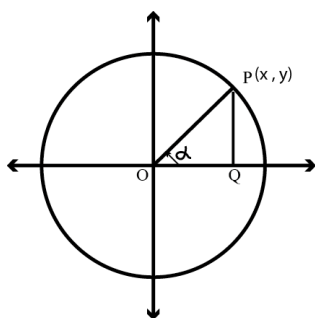


$$\left. \begin{array}{l} \sin B = \frac{AC}{BC} \rightarrow \sin^2 B = \frac{AC^2}{BC^2} \\ \cos B = \frac{AB}{BC} \rightarrow \cos^2 B = \frac{AB^2}{BC^2} \end{array} \right\} + \sin^2 B + \cos^2 B = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

اثبات به روش دوم:

دایره مثلثاتی به شعاع ۱



$$\begin{cases} \sin \alpha = PQ = y \\ \cos \alpha = OQ = x \end{cases} \quad \begin{cases} \sin^2 \alpha = y^2 \\ \cos^2 \alpha = x^2 \end{cases}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = x^2 + y^2 = 1$$

$$\widehat{OPQ}: OQ^2 + PQ^2 = OP^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

رابطه ی بین $\sin$ و $\cos$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

بنابراین همواره:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

نکته: در رابطه های بالا علامت $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را با توجه به ناحیه ای که زاویه α در آن قرار دارد تعیین می کنیم.

۵۲- آیا زاویه ای وجود دارد که $\sin$ و $\cos$ آن $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ باشد؟ چرا؟ $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{8}$ باشد چه طور؟



۵۳- اگر α زاویه ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را بیابید.

روش اول ← مثلث قائم الزاویه

روش دوم ←

روش سوم ← روابط $\sin$ و $\cos$



۵۴- اگر α زاویه در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ باشد آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را بیابید.

ب- $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را بیابید.

۵۵- حاصل عبارت روبرو را بیابید.

$$\sqrt{25 - (\sin x)^2} = ?$$

۵۶- رابطه $\tan$ بر حسب $\cos$ و $\cot$ بر حسب $\sin$

۱) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می دانیم



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ می دانیم (۲)}$$

۵۷- اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ باشد آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را بیابید.

ب- اگر $\sec x = \frac{1}{5}$ باشد و x در ناحیه سوم سایر نسبت های مثلثاتی را بیابید .

۵۸- اگر $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ و $\cot \alpha = \frac{5}{12}$ باشد آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را بیابید.



۵۹- حاصل $\frac{1}{\sqrt{16+(4 \tan^2 x)}}$ را بیابید.

۶۰- اگر $\tan \alpha = 2$ باشد حاصل $\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha + 2 \sin \alpha}$ را بیابید.

۶۱- اگر $2 = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ باشد مقدار $\cos x$ را بیابید.

۶۲- مهم اگر $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{3}$ باشد مقدار $\cos \alpha - \sin \alpha$ و $\tan \alpha + \cot \alpha$ را بیابید.



۶۳- اگر $\tan x + \cot x = -2$ باشد مقدار $\sin x + \cos x$ را بیابید.

روابط بین نسبت های مثلثاتی

$$۱) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = ۱ \quad \begin{cases} \sin^2 \theta = ۱ - \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta = ۱ - \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$۴) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$۵) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$۶) \tan \theta = \frac{۱}{\cot \theta}$$

$$۷) \tan \theta \times \cot \theta = ۱$$

$$۸) ۱ + \tan^2 \theta = \frac{۱}{\cos^2 \theta}$$

$$۹) ۱ + \cot^2 \theta = \frac{۱}{\sin^2 \theta}$$

معرفی دو نسبت فرعی مثلثاتی

$$\sec x = \frac{۱}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{۱}{\sin x}$$

اتحاد های مثلثاتی

به رابطه ی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ۱$ بر می گردیم قبلاً درباره این که این رابطه برای هر زاویه ای دلخواه

برقرار است و به مقدار α بستگی ندارد به چنین تساوی هایی مثل $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ۱$ یا

$۱ + \tan^2 \theta = \frac{۱}{\cos^2 \theta}$ و که به ازای هر α همواره برقرار است یک اتحاد مثلثاتی می گوئیم.



تذکر:

۶۴- درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

$$۱) \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$۲) \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$۳) \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$



نکته: اتحاد های فرعی

$$a^r + b^r = (a + b)^r - r ab$$

$$a^r + b^r = (a + b)^r - r ab (a + b)$$

$$a^r + b^r = (a - b)^r + r ab$$

$$a^r + b^r = (a - b)^r + r ab (a - b)$$

$$۴) \sin^r x - \cos^r x = ۱ - r \sin^r x \cos^r x$$

$$۵) \sin^r x + \cos^r x = ۱ - r \sin^r x \cos^r x$$

$$۶) \frac{\sin x}{۱ + \cos x} = \frac{۱ - \cos x}{\sin x}$$

$$۷) ۱ + \tan^r x = \frac{۱}{\cos^r x}$$



$$۸) \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$۹) \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = (\tan x + 1)(\tan x - 1)$$

$$۱۰) \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \times \sin^2 x$$

$$۱۱) (\cos x + \sin x + 1)(\cos x + \sin x - 1) = 2 \sin x \cos x$$



$$۱۲) (\sqrt{2} \sin x + \cos x)^2 + (\sqrt{2} \cos x - \sin x)^2 = ۵$$

$$۱۳) \frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} + \tan^2 x$$

$$۱۴) \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta \quad \theta \text{ در ناحیه چهارم}$$



۶۵- کدام یک از تساوی های زیر یک اتحاد مثلثاتی است؟ چرا؟

$$\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin \theta$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

۶۶- با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ در $\cot \alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید، سپس درستی آن را ثابت کنید.



تمرینات تکمیلی فصل ۲

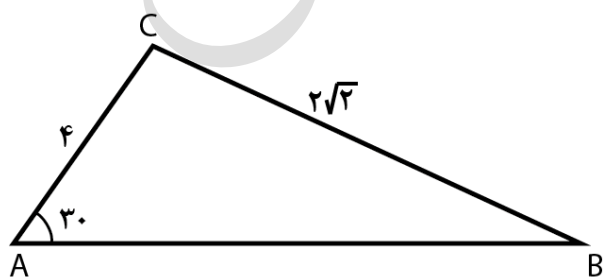
۱- در هر یک از حالت های زیر شعاع حاصل op با جهت مثبت محور طول های زاویه ی θ می سازد نسبت های مثلثاتی زاویه θ را بیابید.

الف) $P(2, 0)$

ب) $P(0, 4)$

پ) $P(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

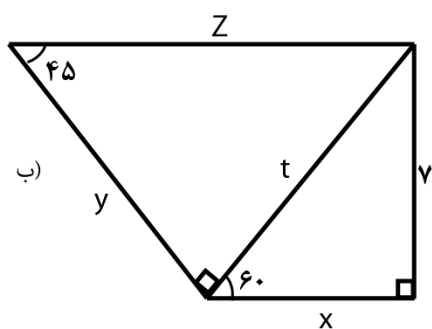
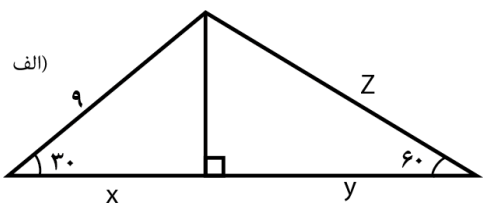
۲- در شکل روبرو اندازه ی AB را بیابید.



$$\tan \hat{B} = ?$$



۳- مقادیر x و y و z را در شکل های زیر بیابید.



$$\tan 70^\circ \approx 2/5$$

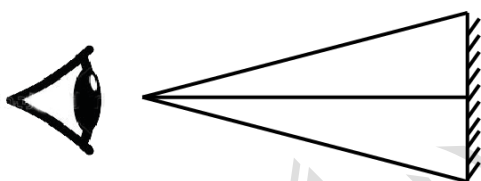
$$\tan 75^\circ \approx 3/7$$

۴- فاصله ی دو نقطه A و B که در سطح زمین قرار دارند ۱۰۰ متر است درختی که پای آن بین این دو نقطه قرار دارد از نقطه ی A با زاویه ی 30° و از نقطه ی B با زاویه 60° دیده می شود ارتفاع درخت را بیابید. (ابتدا شکل رسم کرده و مثلث قائم الزاویه ایجاد کنید).

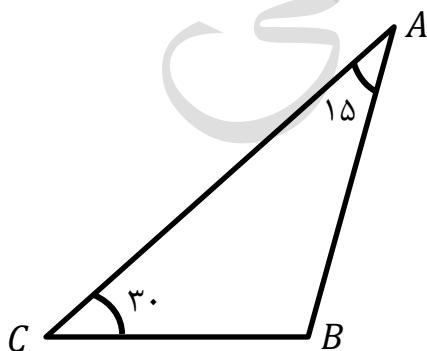


*۵- فاصله ی دو نقطه ی A و B که در سطح زمین قرار دارند ۲۱ متر. درختی که پای آن در یک طرف این نقطه قرار از نقطه A با زاویه 30° درجه و از نقطه B با زاویه 45° درجه دیده می شود، ارتفاع درخت را بیابید.

۶- شخصی مقابل یک تابلو به طول ۳ متر که روی دیوار نصب شده است ایستاده است اگر این شخص بدون اینکه سر خود را تکان دهد به تابلو نگاه کند و بالاترین قسمت تابلو را با زاویه 30° درجه به پایین ترین قسمت تابلو را با زاویه 60° درجه ببیند شخص تا تابلو چند سانتی متر است.

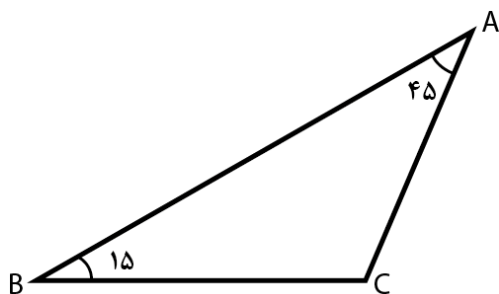


۷- در شکل مقابل فاصله ی نقطه ی A از ضلع BC برابر $1 - \sqrt{3}$ است طول ضلع AB را محاسبه کنید.





۸- در متوازی الاضلاعی اندازه ی دو قطر ۱۲ و ۸ و زاویه ی بین آن ها 135° است مساحت متوازی الاضلاع را به دست آورید.



۹- در هر یک از مسائل زیر مثلث ABC در راس C قائم الزاویه فرض شده است با استفاده از مفروضات داده شده آن چه خواسته شده را بیابید.

الف) $b = 4$, $\hat{A} = 30^\circ$, $a = ?$

ب) $a = 9$, $\hat{B} = 45^\circ$, $c = ?$

پ) $a = 5$, $b = 9$, $\sin A = ?$

ت) $a = 3$, $c = 7$, $\tan B = ?$

ث) $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 2AC$, $\sin B = ?$



۱۰- حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} =$

۲) $\sin^2 30^\circ - \cos^2 60^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 45^\circ - 1 =$

۳) $\frac{\cos 45^\circ \tan 30^\circ - \sin^2 30^\circ \cos 18^\circ}{\sin 27^\circ + \cos 36^\circ} =$

۴) $\sin^2 30^\circ - \cos^2 60^\circ - \tan^2 45^\circ =$

۵) $\sqrt{\frac{-1 + 2 \cos 30^\circ}{1 + 2 \sin 60^\circ}} + \frac{-2 \cos 60^\circ + 1}{2 \sin 30^\circ + 1} =$



$$۶) -۲ \sin^2 ۱۰ + \tan^2 ۶۰ - ۲ \cos^2 ۱۰$$

۱۱- در هر حالت زاویه θ در کدام یک ربع های اول تا چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد؟

الف) $\sin \theta > ۰$ و $\cos \theta > ۰$

ب) $\cos \theta > ۰$ و $\tan \theta < ۰$

ج) $\sin \theta \cot \theta < ۰$

د) $\tan \theta$ و $\sin \theta$ هم علامت



۱۲- اگر $\tan x = \frac{3}{5}$ آن گاه مقدار $\frac{3+\cos x}{\sin x} - \frac{5}{\cos x}$ را بیابید.

۱۳* - اگر $\frac{2}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} = 0$ آن گاه مقدار $\tan x + \cot x$ را بیابید.

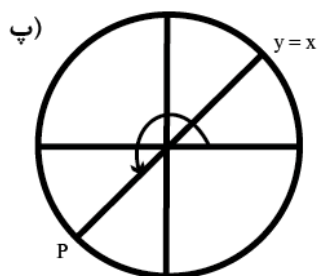
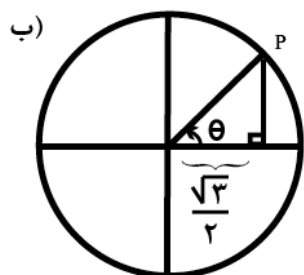
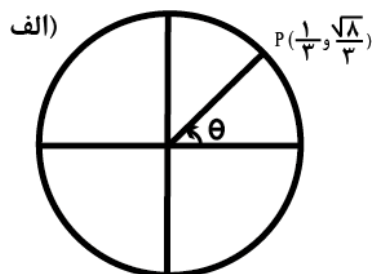
۱۴- مختصات انتهای کمان مقابل به هر یک از زوایای زیر را مشخص کنید .

$-315^\circ, -270^\circ$

$540^\circ, +375^\circ, -401 \times 90^\circ, -210^\circ$



۱۵- در هر قسمت نسبت های مثلثاتی θ را بیابید.



۱۶- علامت $< = >$ بگذارید.

الف) $0 < \alpha < 45$ $\rightarrow$ $\cos \alpha$ ☐ $\sin \alpha$ / $\tan \alpha$ ☐ $\cot \alpha$

ب) $45 < \alpha < 90$ $\rightarrow$ $\cos \alpha$ ☐ $\sin \alpha$ / $\tan \alpha$ ☐ $\cot \alpha$



۱۷- خطی با جهت منفی محور عرض ها و در ناحیه سوم زاویه ی 30° می سازد، اگر این خط از نقطه ی $(2, 1)$ بگذرد معادله ی خط را بنویسید.

۱۸- خط d_1 و d_2 با هم زاویه 105° می سازد و در نقطه ی $(2, -3)$ متقاطع هستند اگر d_1 با جهت مثبت محور طول ها زاویه 150° بسازد معادله ی خط d_2 را بیابید.

۱۹- اگر خط $(2m - 1)y + (m + 2)x + 3 = 0$ معادله ی خطی باشد که با محور x ها زاویه 45° می سازد m را بیابید.

۲۰- خط $\sqrt{2}x - \sqrt{6}y + \sqrt{8} = 0$ محور y ها را با چه زاویه ای قطع می کند؟



۲۱- اگر $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{3}$ باشد حاصل $\sin x - \cos x$ را بیابید.

۲۲- درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

ب) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$

پ) $(\tan \alpha - 1)(\cot \alpha + 1) = \tan \alpha - \cot \alpha$

ت) $\sin x \tan x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$



$$\text{ث) } \cos^2 \alpha (\sec^2 \alpha) = \sec^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{ج) } \sin x \cos x (\sec^2 x + \csc^2 x) = (\sin x + \cos x)^2$$

$$\text{چ) } \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha) = 1$$

$$\text{ح) } \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = 1$$

$$\text{خ) } 1 - \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$



د) $\frac{1}{\sin^4 x} = 2 \cot^2 \theta + \cot^4 \theta + 1$

۲۳- اگر $\frac{\sin^2 x - 2 \cos^2 x + 1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 1} = 4$ مقدار $\cot^2 x$ را بیابید.

۲۴- زاویه بین دو خط $\sqrt{12}x + 6y = 8$ و $17x - 10y = 34$ را در محل تقاطعشان بیابید.
($\sqrt{3} = 1/7$)

۲۵- اگر $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ حاصل $\frac{1}{\cos x} - \sqrt{1 + \tan^2 x}$ را بیابید.



۲۶- در مثلث ABC ، $A = 90^\circ$ ثابت کنید. $\frac{\cos^2 c + \sin^2 c}{1 - \sin^2 c} = 2 \tan^2 c$

۲۷- اگر θ از -30° تا 30° تغییر کرده و $\cos \theta = \frac{m-1}{2}$ باشد m در چه بازه ای تغییر می کند.

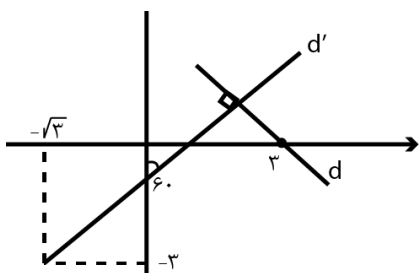
۲۸- اگر θ در ناحیه دوم باشد حاصل $A = |\sin \theta| + |\cos \theta| + |1 - \sin \theta| - |1 - \cos \theta|$ را بیابید.

۲۹- اگر $\sin \alpha = 2a + b$ و $\cos \alpha = a - 2b$ باشد رابطه ی بین a و b را بیابید.



۳۰- اگر $\tan \alpha = 2$ حاصل $\frac{(1+\cos \alpha)(\tan \alpha - \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha}$ را بیابید.

۳۱- معادله ی هر یک از خط ها را بنویسید.



۳۲- اگر $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$ حاصل $\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}$ را بیابید.

۳۳- اگر $30^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ باشد و $\cos \alpha = 2m - 1$ و $\sin \alpha = \frac{n-1}{3}$ باشد m و n را بیابید.



۳۴- حاصل عبارت های زیر را بیابید .

$$\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \dots \times \tan 89^\circ$$

$$\cos 36^\circ + \cos 72^\circ + \cos 108^\circ + \cos 144^\circ$$

$$\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ$$

۳۵- فرض کنید $\tan 10^\circ = a$ حاصل عبارت زیر را بیابید .

$$\frac{4 \cos 37^\circ - 5 \sin 1^\circ}{3 \cos 28^\circ + \sin 26^\circ}$$

۳۶- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ را بیابید .



۳۷- اگر $x = \frac{2}{\sin \alpha}$ و $y = 3 \cot \alpha$ مقدار $9x^2$ کدام است ؟

۴ $36 + 4y^2$

۳ $36 - 4y^2$

۲ $4 + 9y^2$

۱ $9 + 4y^2$

۳۸- انتهای کمان روبرو به زاویه α در کدام ناحیه قرار گیرد تا تساوی زیر یک اتحاد باشد ؟

$$\tan \alpha + \cot \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}}$$

۳۹- در هر یک از فاصله های داده شده مختصات بیان شده مربوط به چه زوایایی است ؟

$[0, 360]$

$$A \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$[-90, 90]$

$$B \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$$



$$C \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \quad [-180^\circ, 180^\circ]$$

*۴۰- ضرایب A و B را چنان بیابید که $1 - \cot^2 x = \frac{A}{\sin^2 x} - \frac{B}{\sin^4 x}$ [امتیازی]

*۴۱- اگر A و B و C زاویه های مثلثی باشند ثابت کنید : [امتیازی]

$$\sin \frac{3A}{2} = -\cos \frac{(3B + 3C)}{2}$$